

De Wiskunde achter Verkeersstromen

Victor L. Knoop
4 april 2025



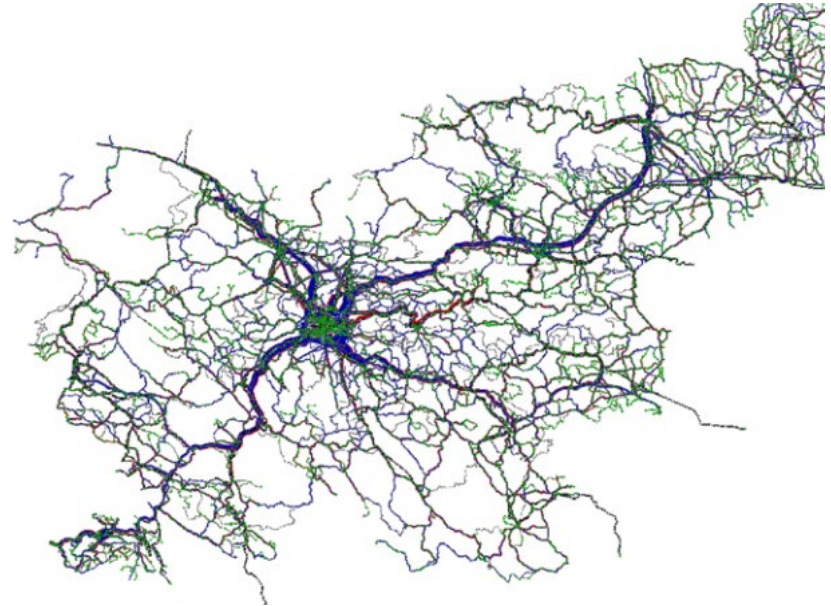
Verkeer stroomt...

- ... als deeltjes



Verkeer stroomt...

- ... als deeltjes



Verkeer stroomt...

- ... maar ook als continuum (net als water)



Verkeer stroomt...

- ... maar ook als continuum (net als water)



Agenda

- Introductie verkeersstromen
 - Conceptueel differentiaalvergelijkingen in verkeer
- Experiment
- Resultaten & conclusies

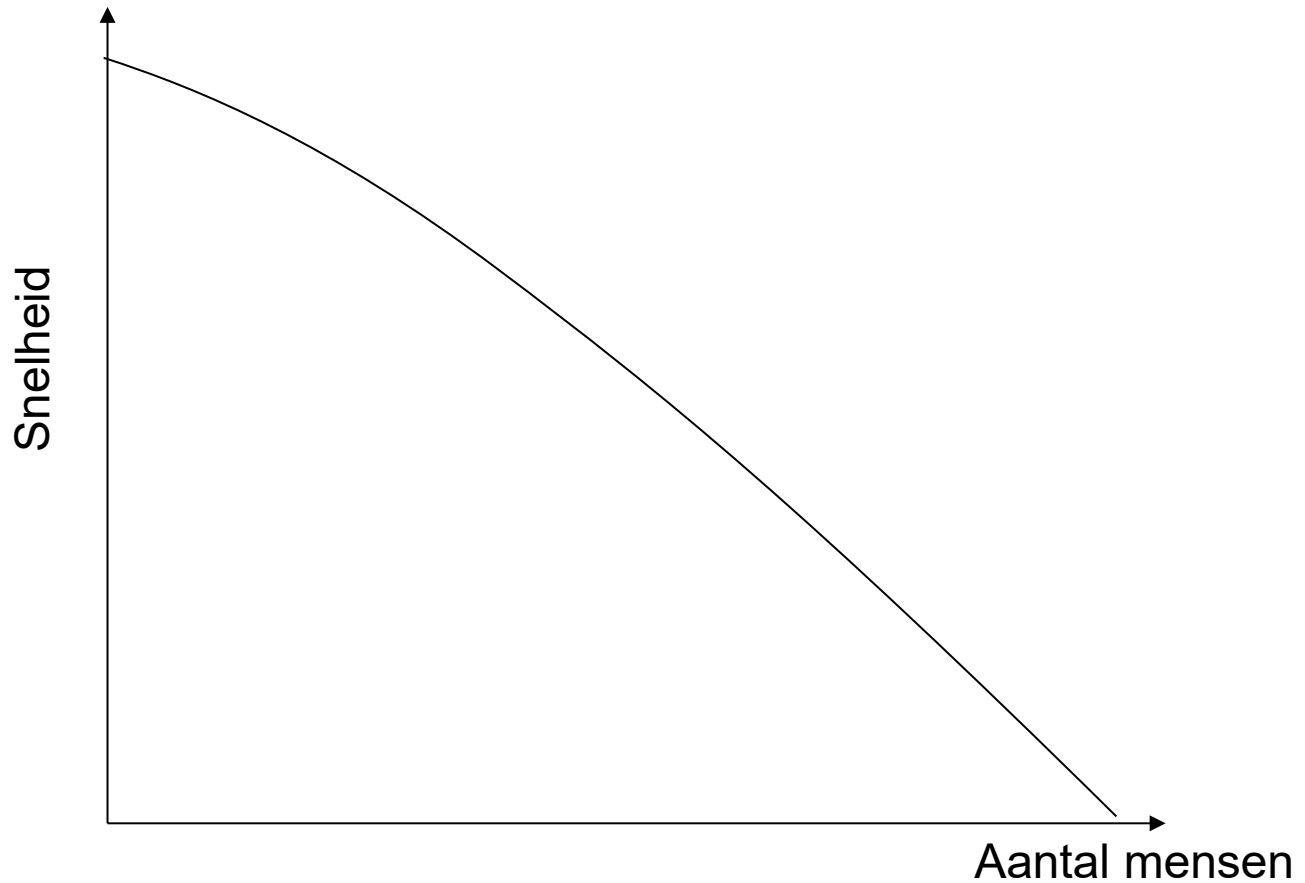


Drukke en snelheid

- Meer verkeer op de weg $\Leftrightarrow$ lagere snelheid
- Causaliteit is lastig:
 - Meer auto's dus ik rijd langzamer?
 - De auto voor me rijdt langzamer dus ik kan er dichter op rijden?

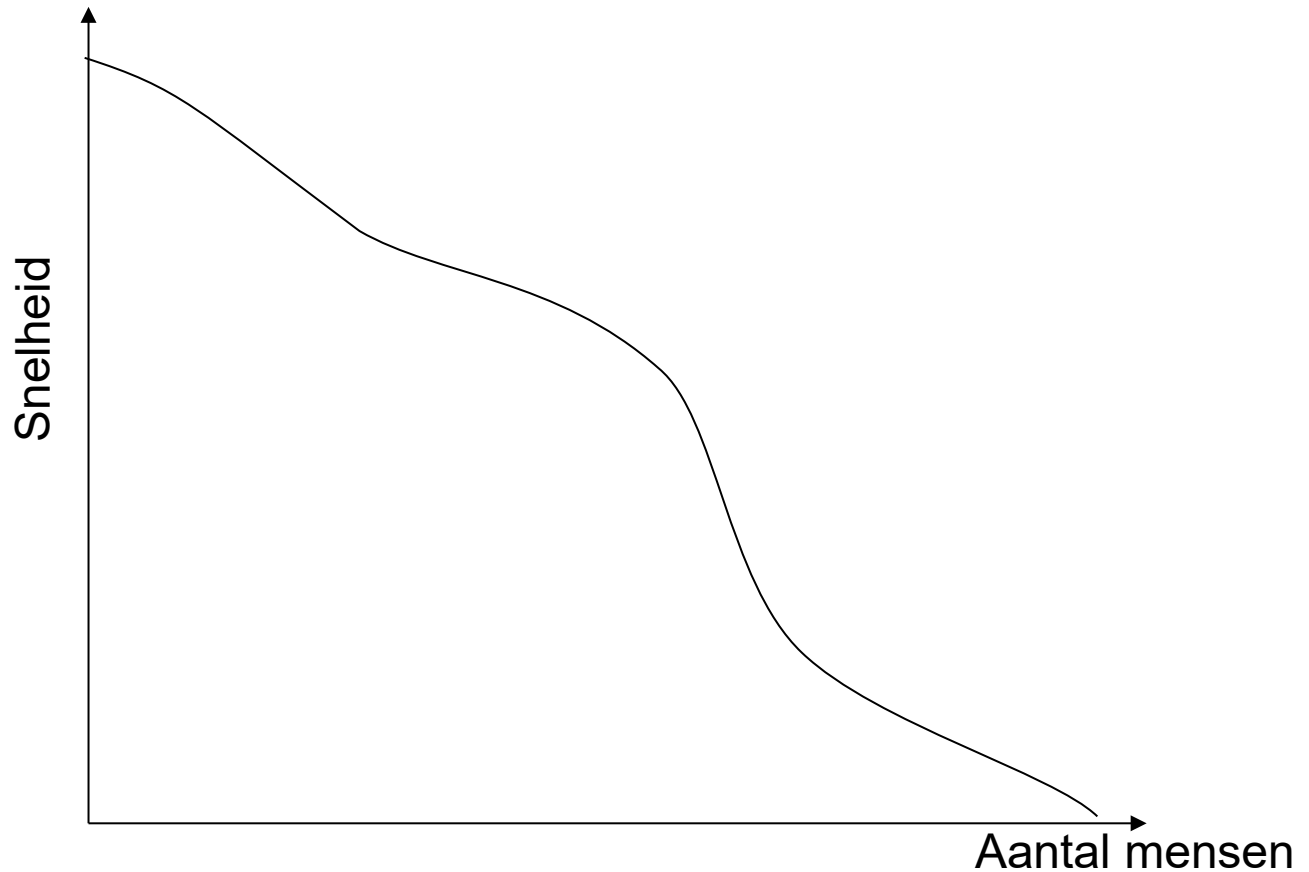
Drukke en snelheid

- Meer verkeer op de weg $\Leftrightarrow$ lagere snelheid



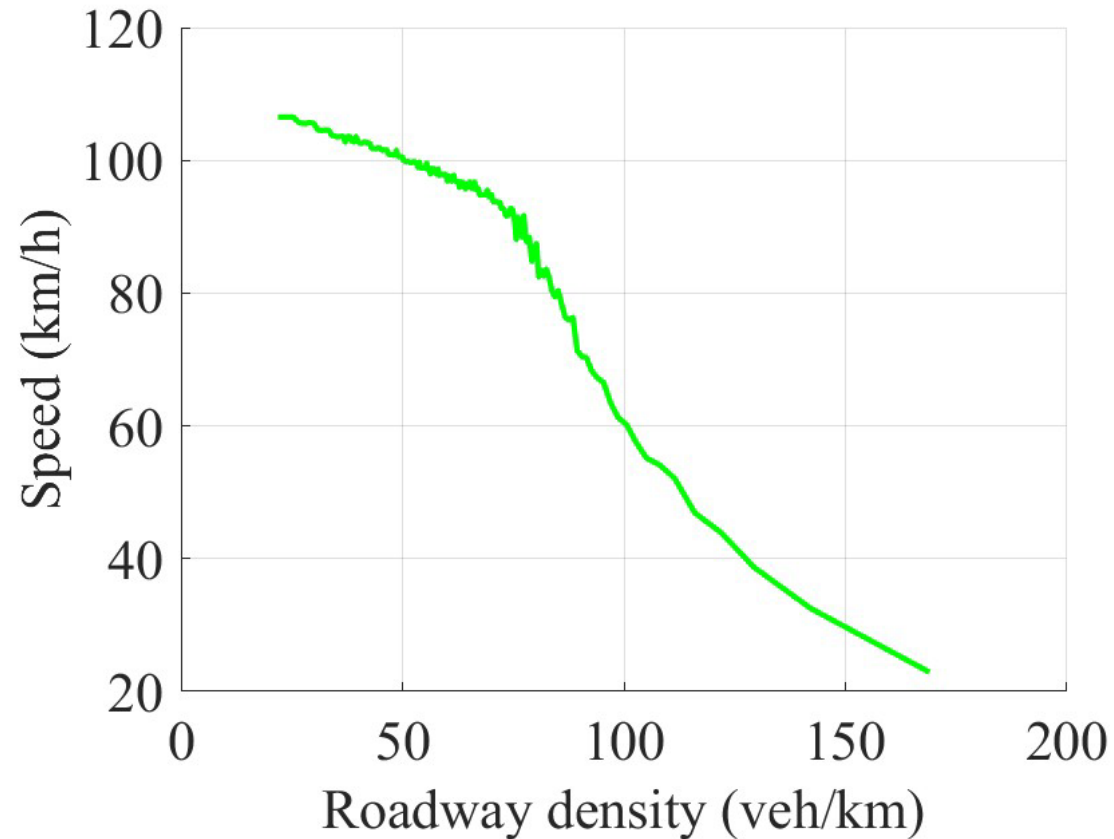
Drukke en snelheid

- Meer verkeer op de weg $\Leftrightarrow$ lagere snelheid



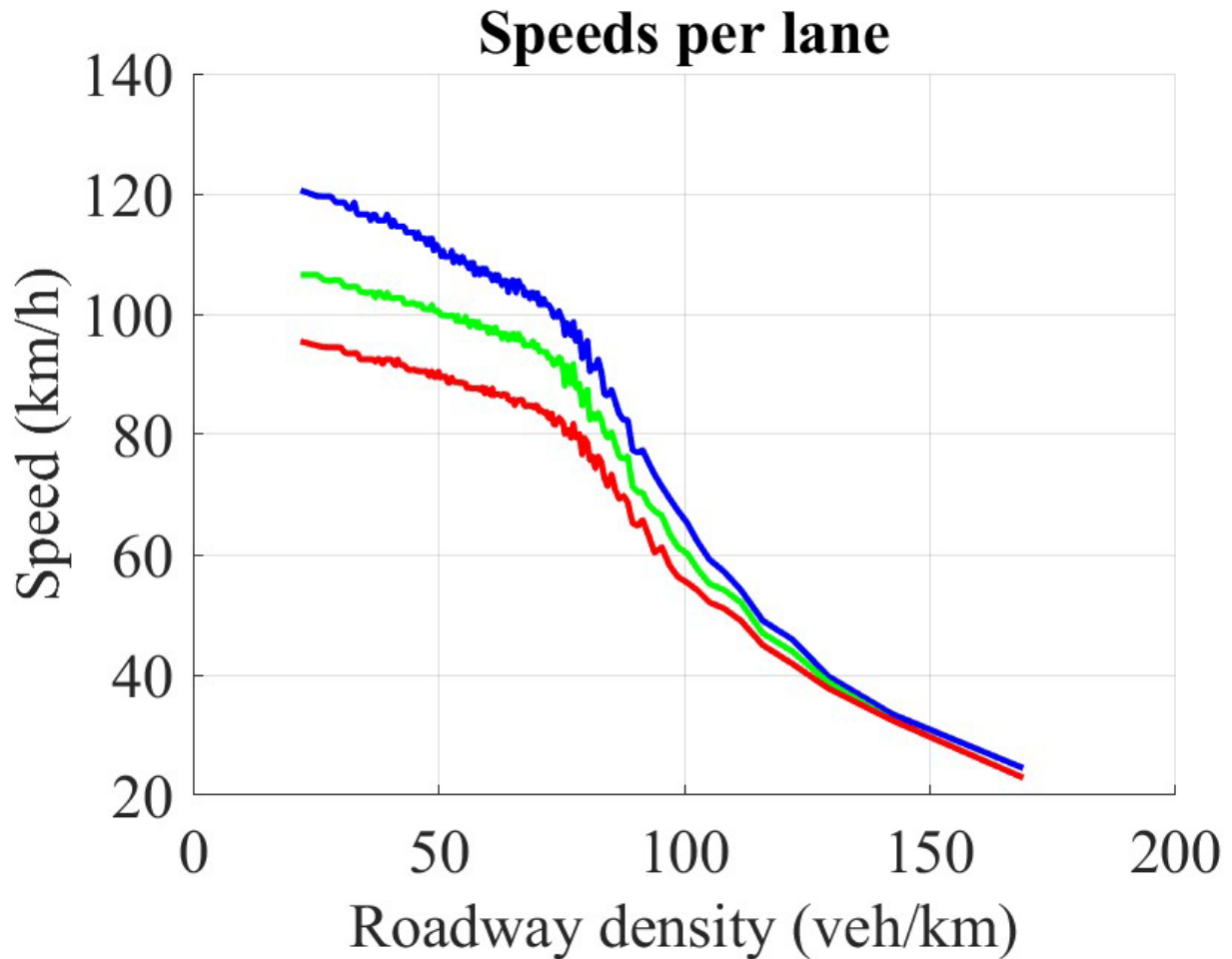
Drukke en snelheid

- Meer verkeer op de weg $\Leftrightarrow$ lagere snelheid



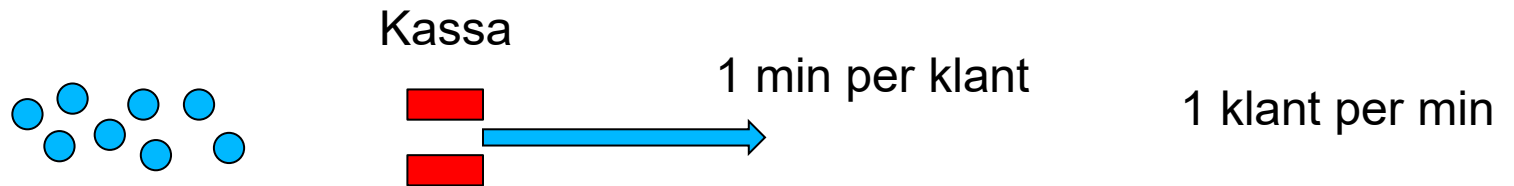
Drukke en snelheid

- Meer verkeer op de weg $\Leftrightarrow$ lagere snelheid



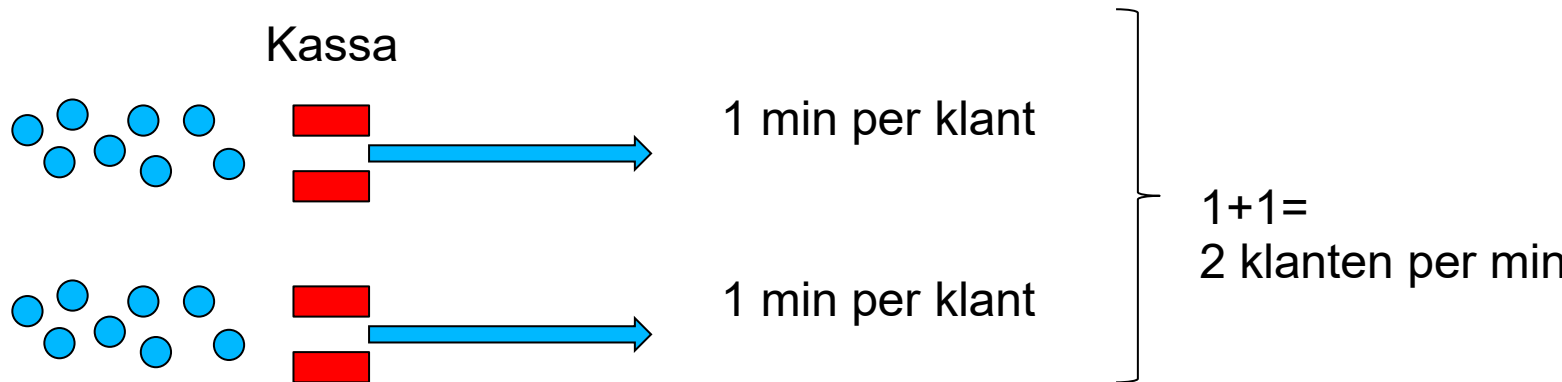
Wachtrijsysteem

- Doorstroming bij een kassa hangt af van
 - Het aantal kassa's dat geopend is
 - De snelheid van afhandelen van elke caissière



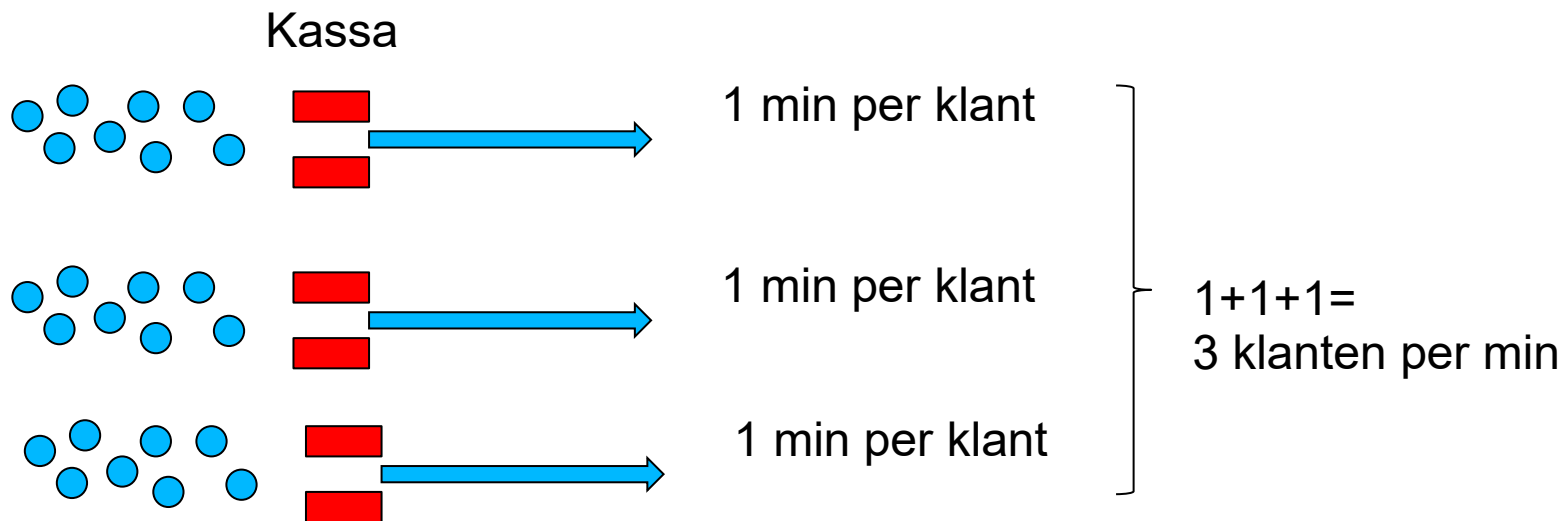
Wachtrijsysteem

- Doorstroming bij een kassa hangt af van
 - Het aantal kassa's dat geopend is
 - De snelheid van afhandelen van elke caissière



Wachtrijsysteem

- Doorstroming bij een kassa hangt af van
 - Het aantal kassa's dat geopend is
 - De snelheid van afhandelen van elke caissière



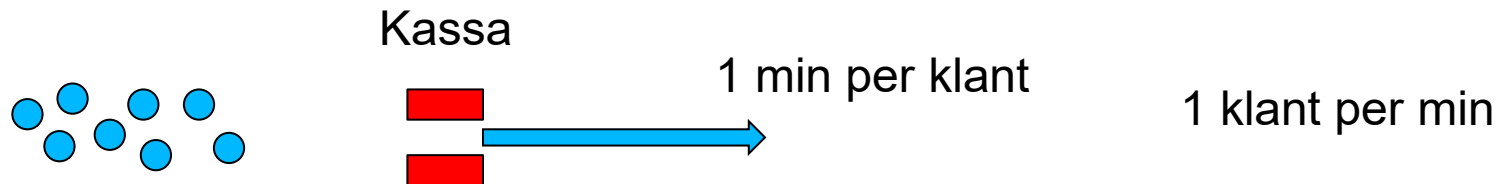
Gedachte-experiment

- Wat nu als caissières langzamer gaan werken als er meer kassa's open zijn (“onderling overleg”)
- Elke caissière erbij verhoogt de afhandelingstijd per caissière met een factor 1.5

Aantal kassa's	1	2	3	4	5
Tijd per caissiere	1	1,5	2,3	3,4	5,1

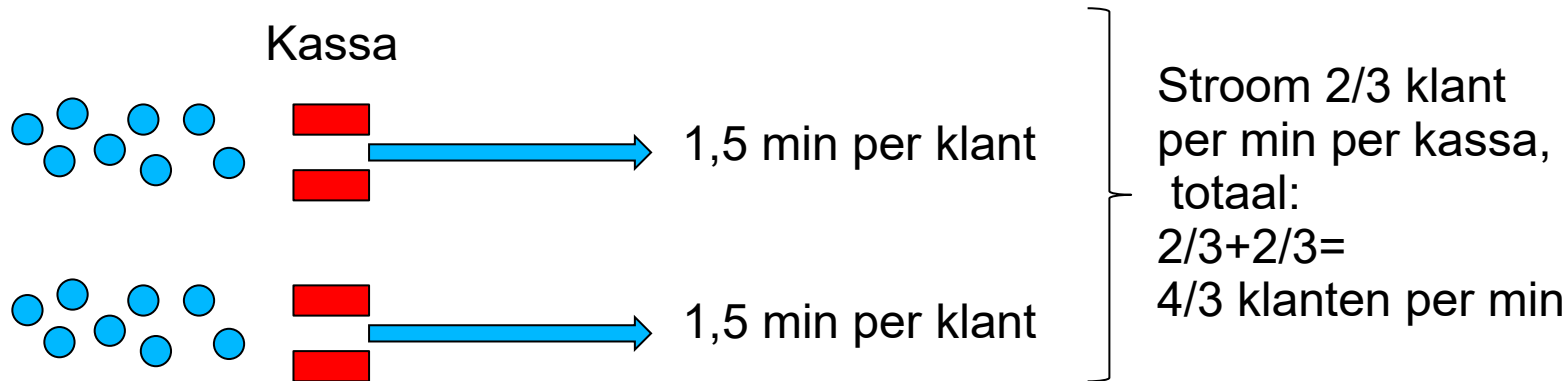
Wachtrijsysteem

- Doorstroming bij een kassa hangt af van
 - Het aantal kassa's dat geopend is
 - De snelheid van afhandelen van elke caissière



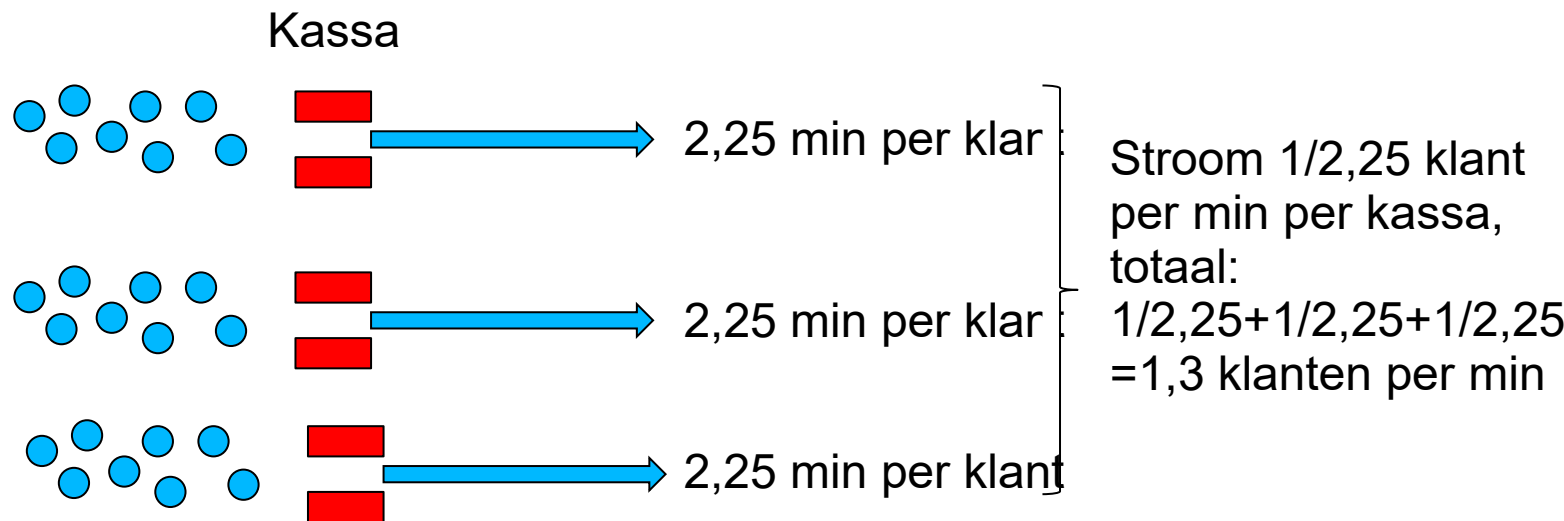
Wachtrijsysteem

- Doorstroming bij een kassa hangt af van
 - Het aantal kassa's dat geopend is
 - De snelheid van afhandelen van elke caissière



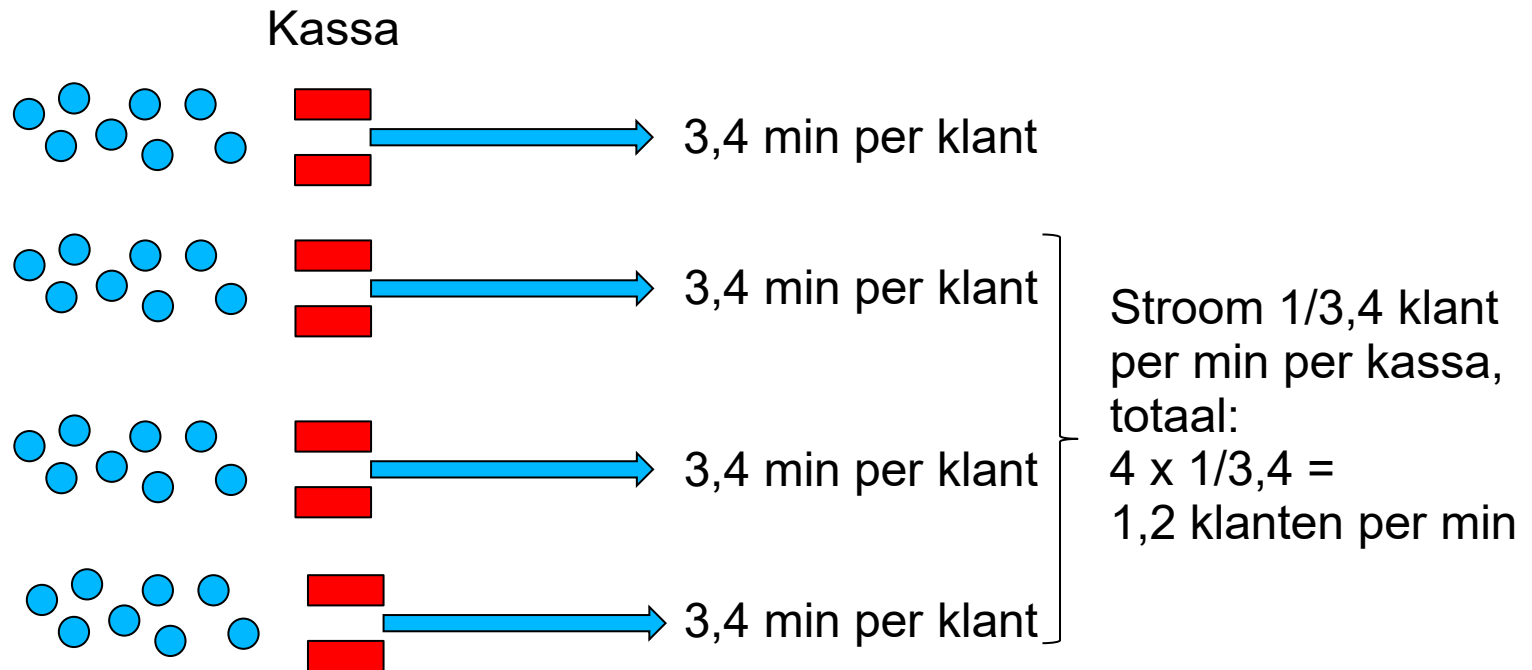
Wachtrijsysteem

- Doorstroming bij een kassa hangt af van
 - Het aantal kassa's dat geopend is
 - De snelheid van afhandelen van elke caissière



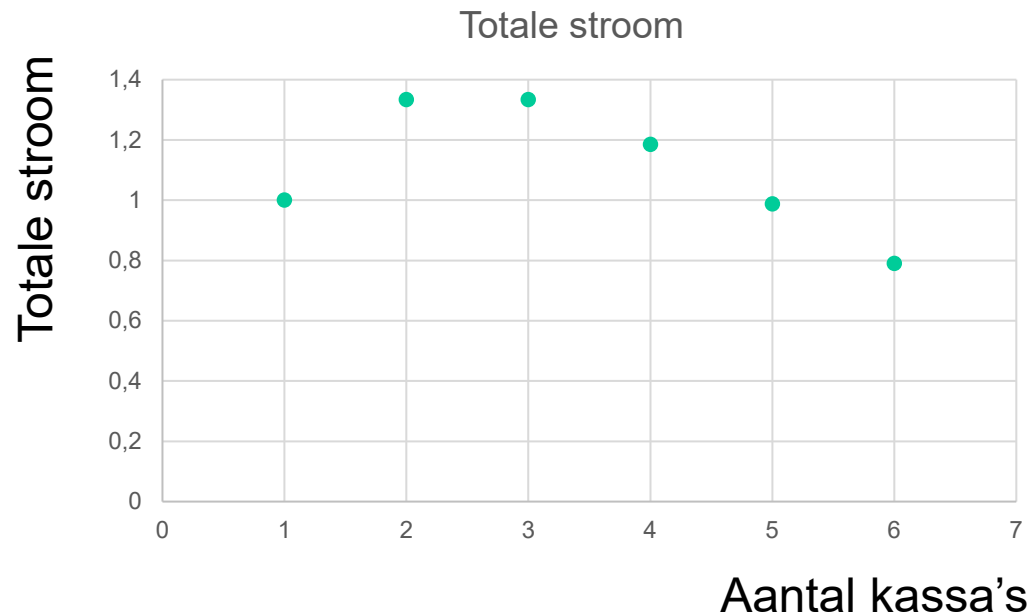
Wachtrijsysteem

- Doorstroming bij een kassa hangt af van
 - Het aantal kassa's dat geopend is
 - De snelheid van afhandelen van elke caissière



Wachtrijsysteem

- Doorstroming bij een kassa hangt af van
 - Het aantal kassa's dat geopend is
 - De snelheid van afhandelen van elke caissière



Uitstroom kassa-systeem

- **Uitstroom proportioneel met**
 - **aantal kassa's en**
 - **snelheid**

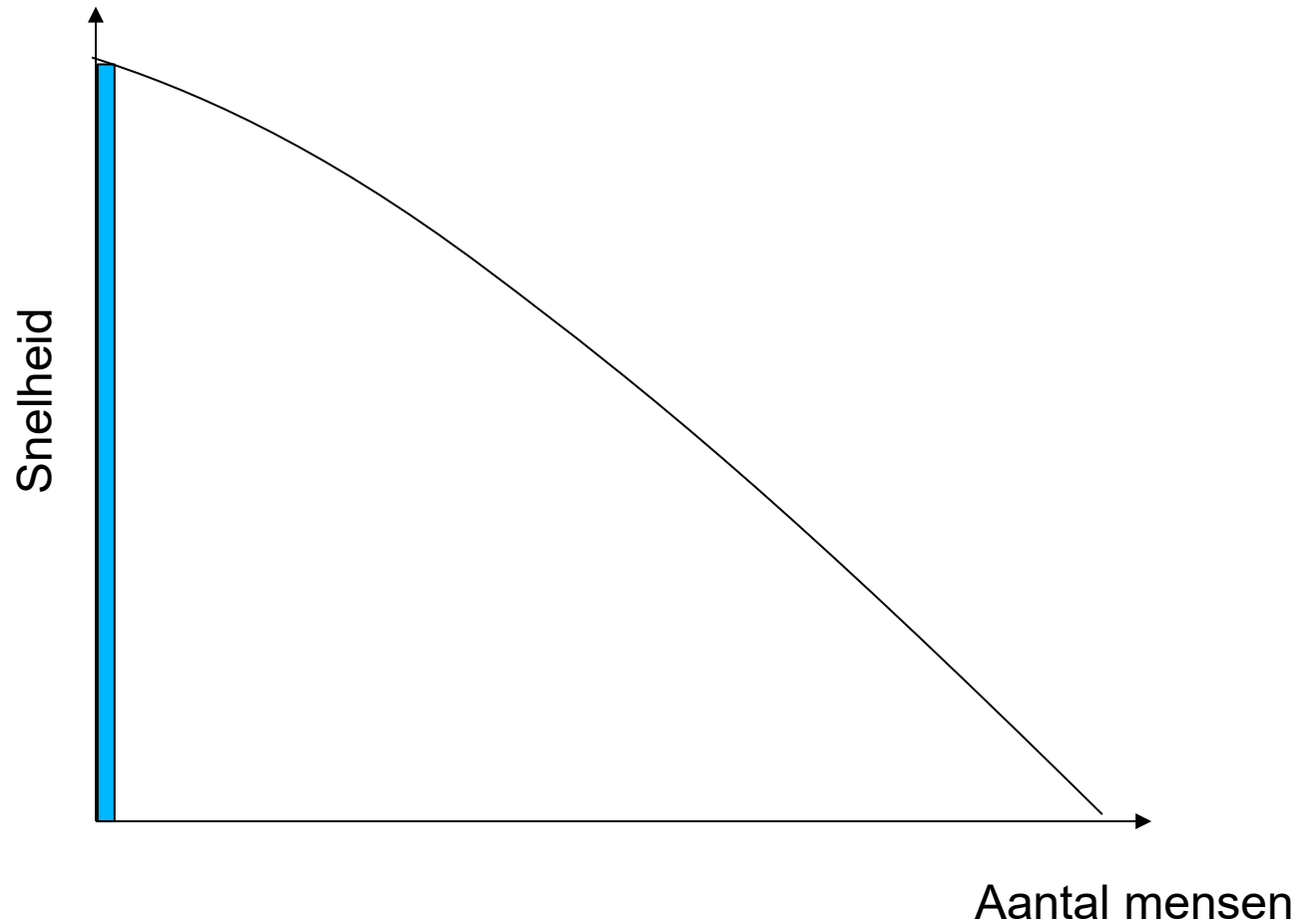
Uitstroom verkeerssysteem

	Kassa-systeem	Verkeerssysteem
Parallel: aantal	kassa's	Verkeersdeelnemers
Afhandelingsnelheid	Snelheid van caissiere	Rijsnelheid

- **Uitstroom proportioneel met**
 - **aantal verkeerdeelnemers en**
 - **Snelheid**

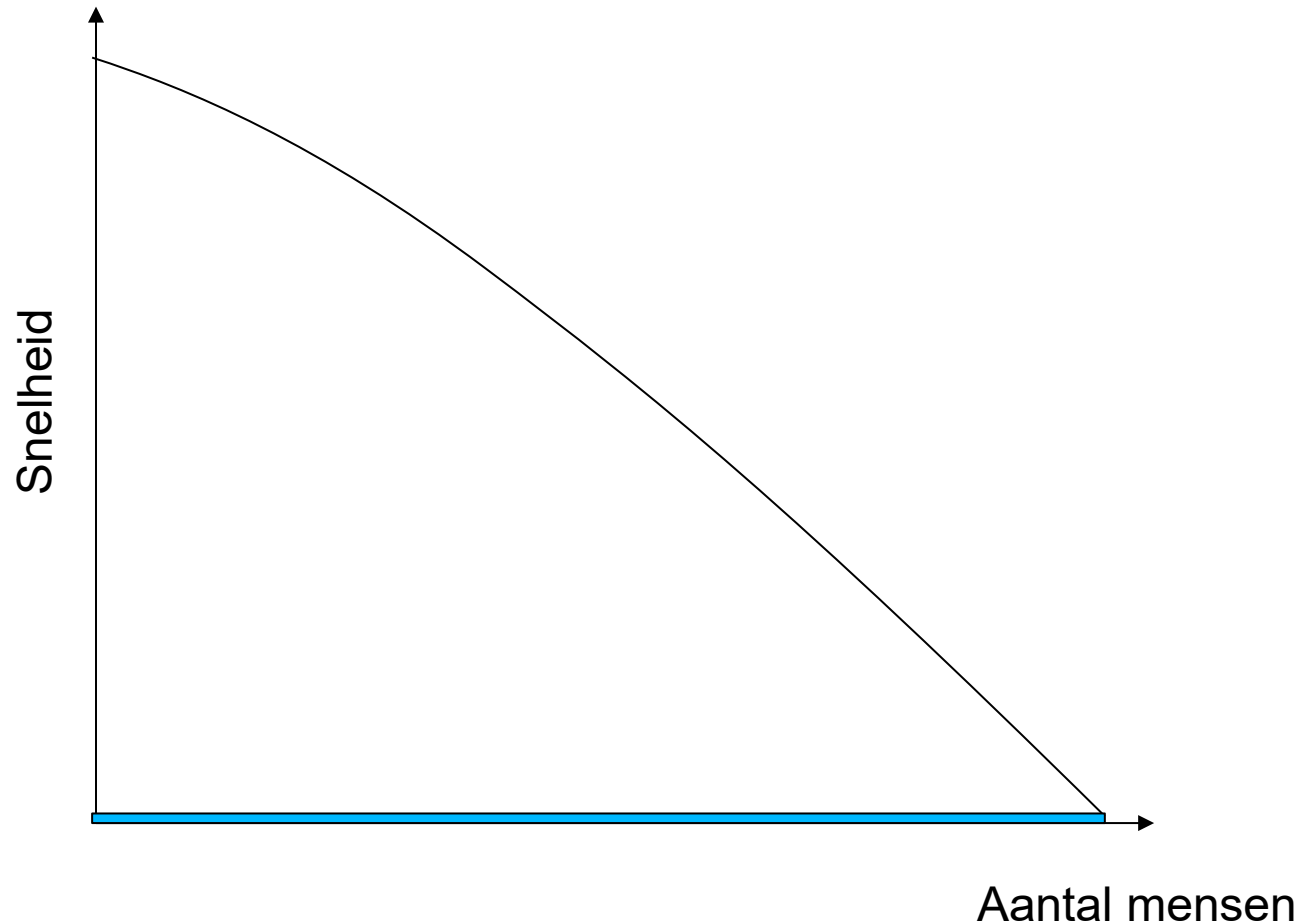
Drukke en snelheid

- Uitstroom proportioneel met snelheid en aantal mensen



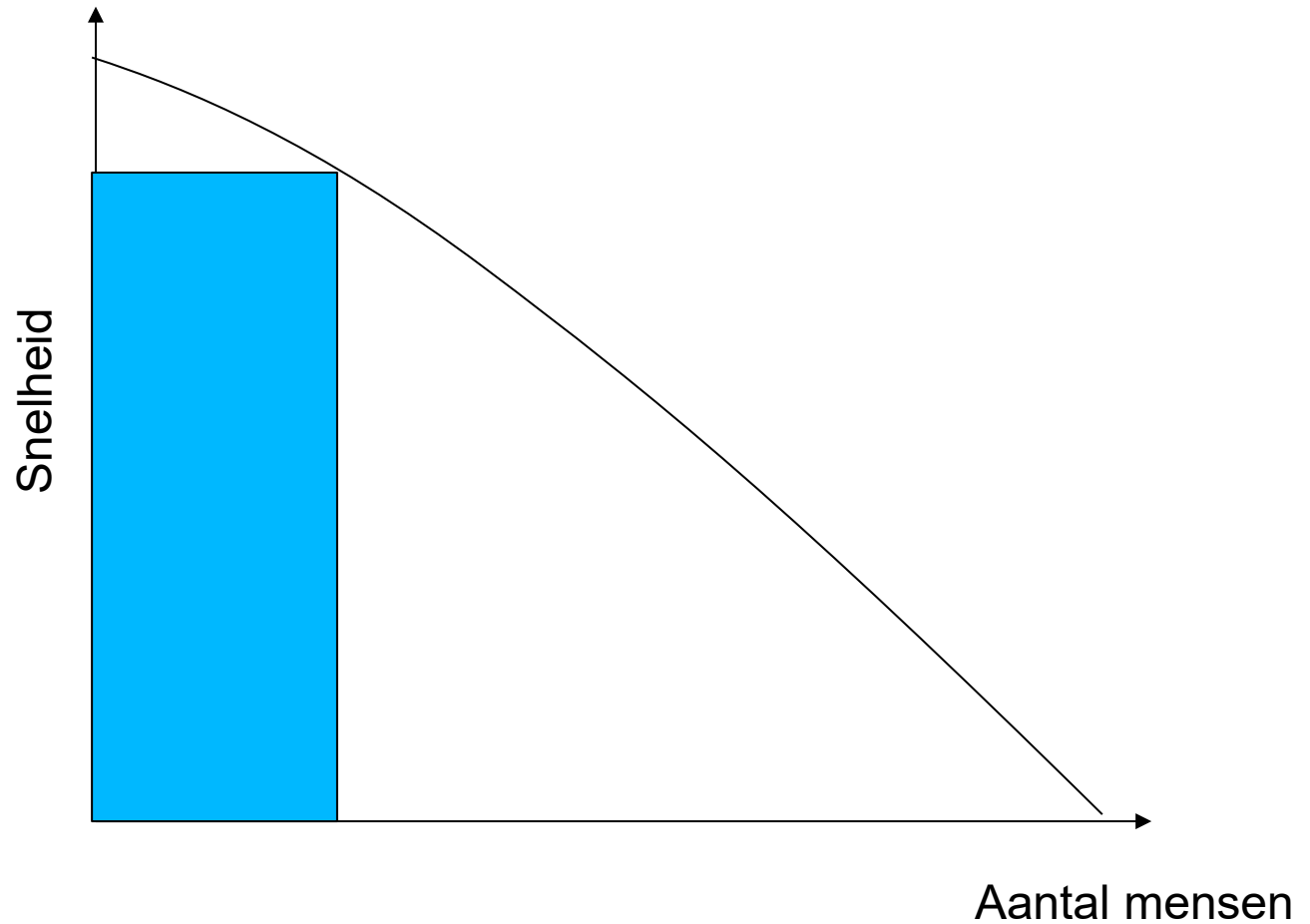
Drukke en snelheid

- Uitstroom proportioneel met snelheid en aantal mensen



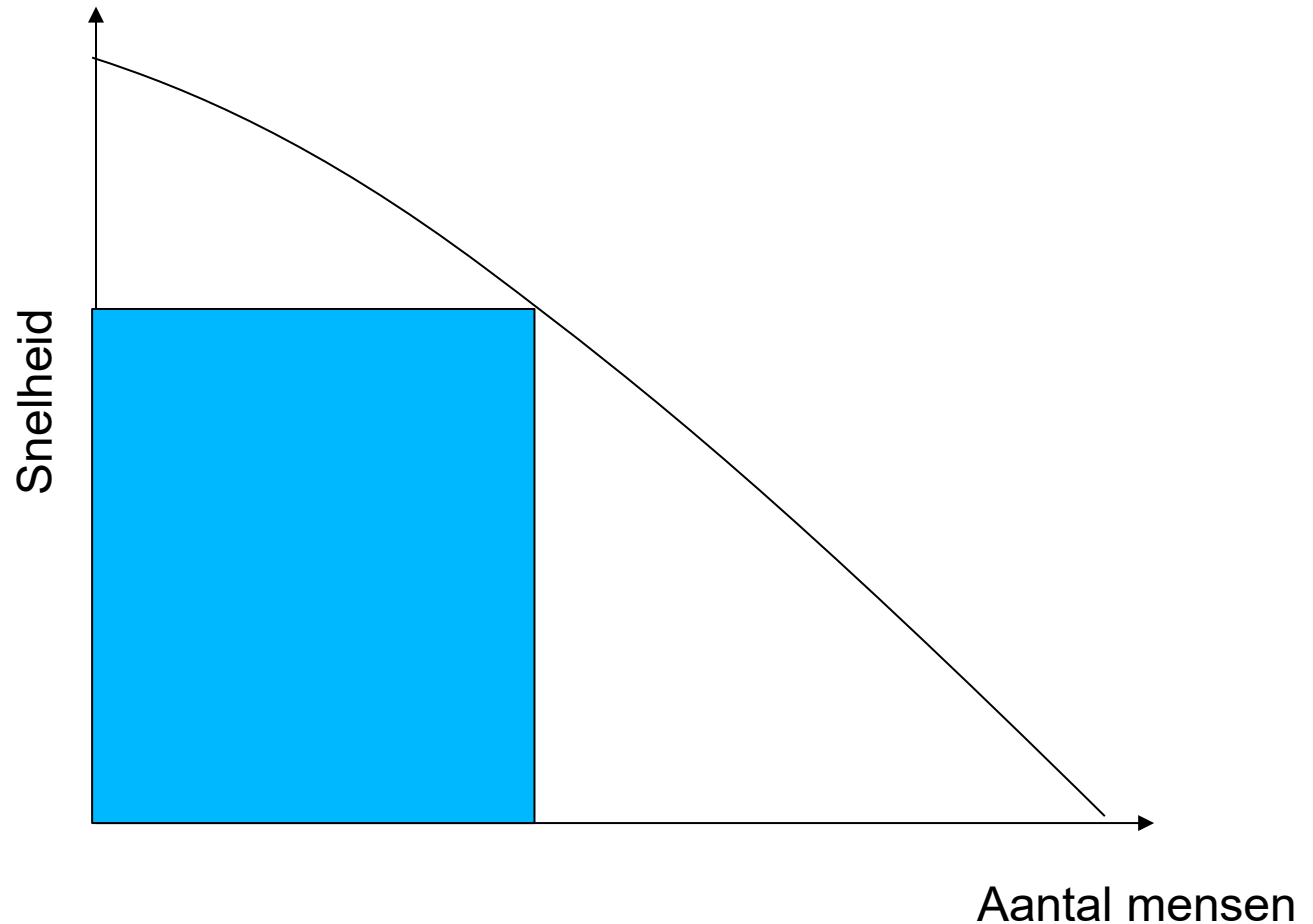
Drukke en snelheid

- Uitstroom proportioneel met snelheid en aantal mensen



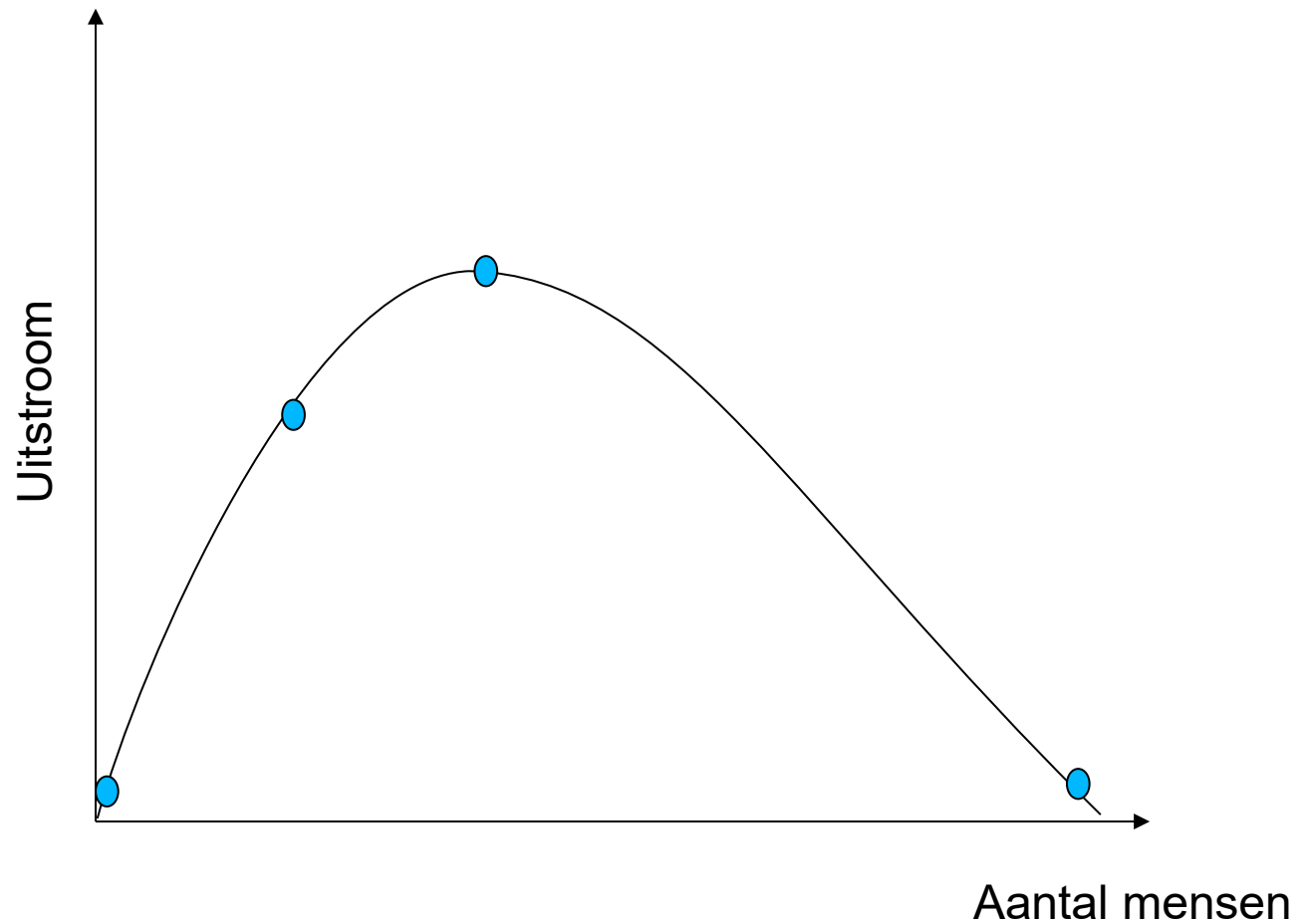
Drukke en snelheid

- Uitstroom proportioneel met snelheid en aantal mensen

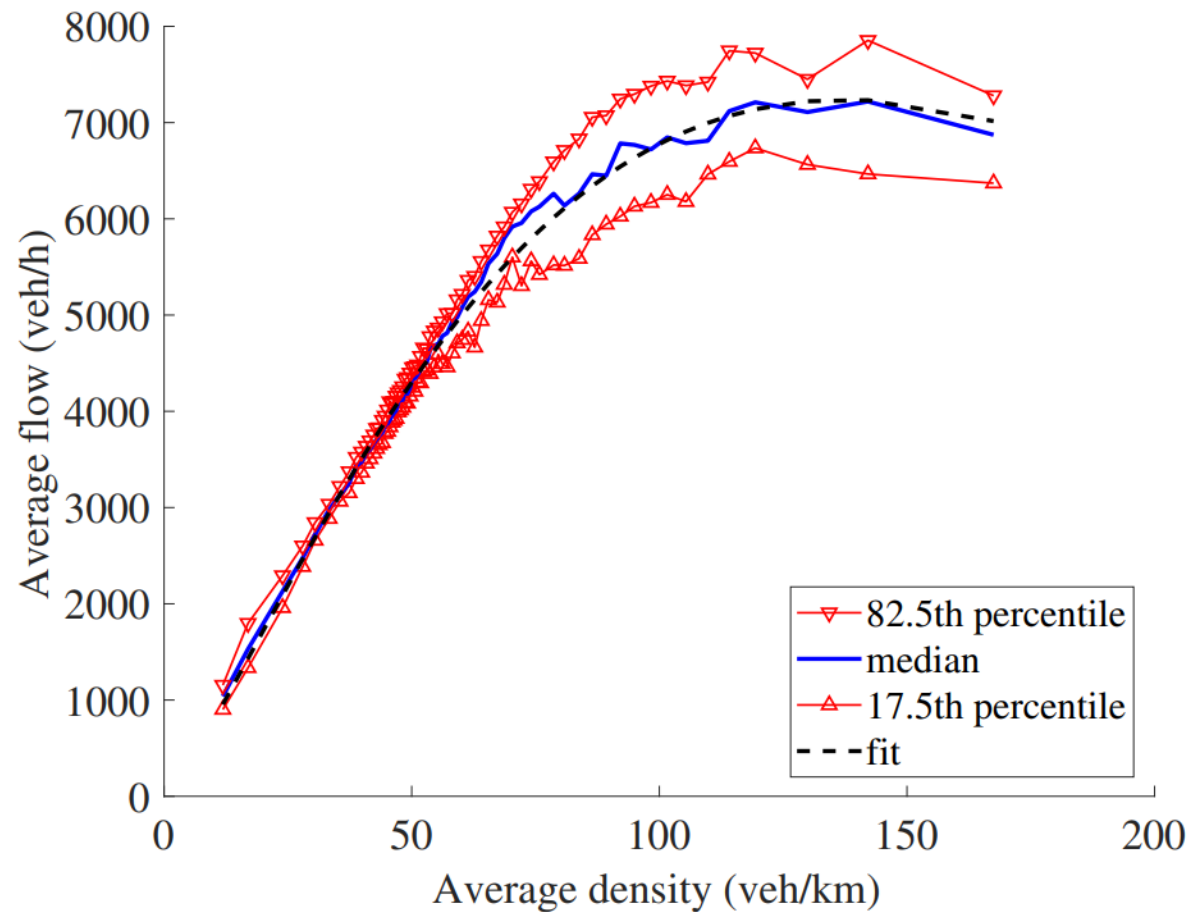


Drukke bepaalt uitstroom

- Uitstroom als functie van aantal mensen



Hoe werkt dat in verkeer

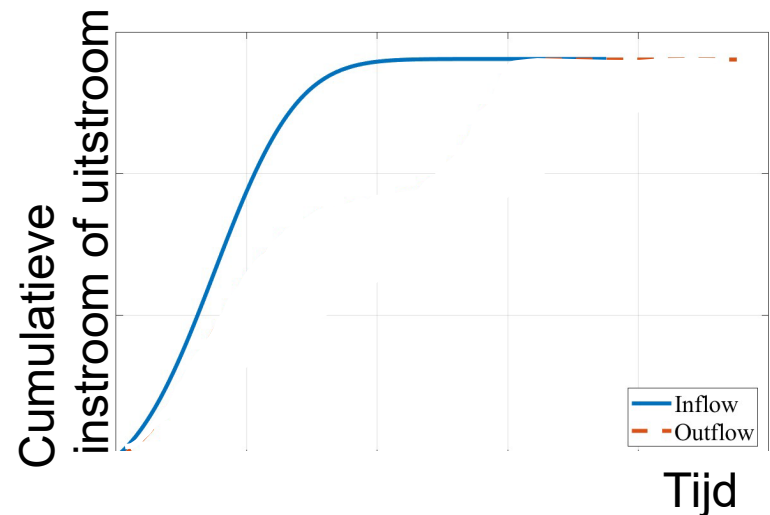
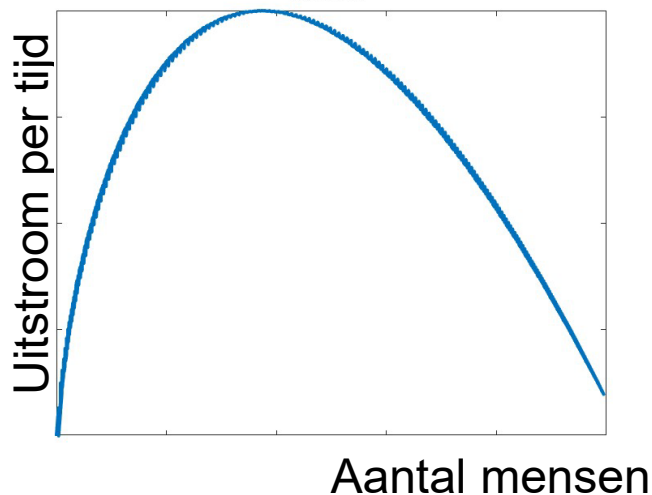


Differentiaalvergelijking

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N (intern bepaald)
- Instroom:
hoe veel mensen gaan de weg op (extern bepaald)
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$

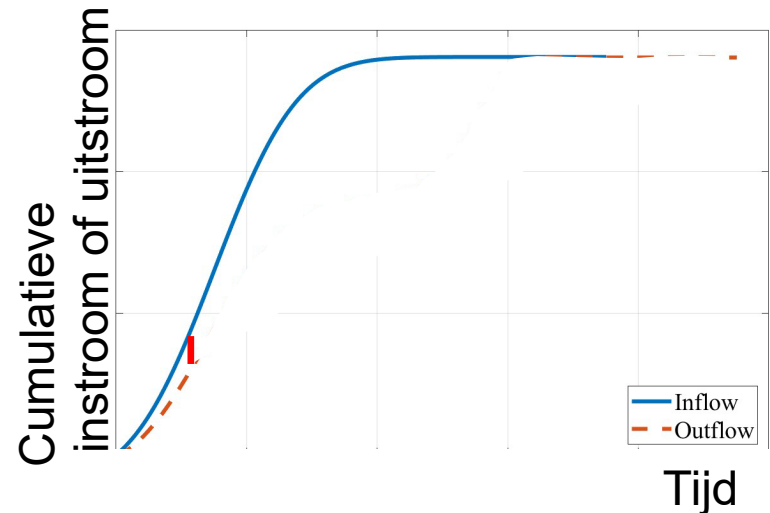
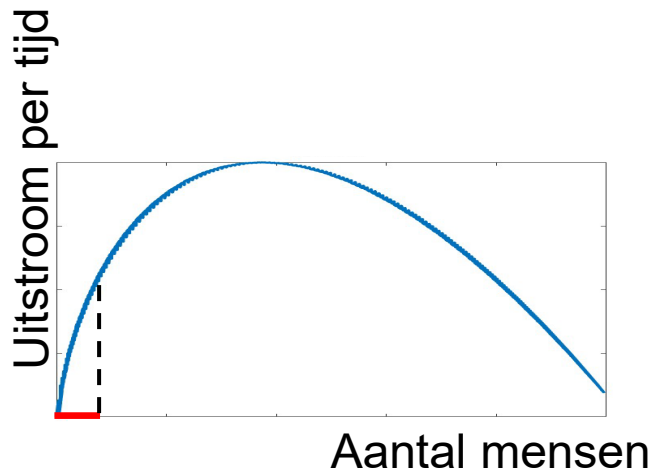
Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



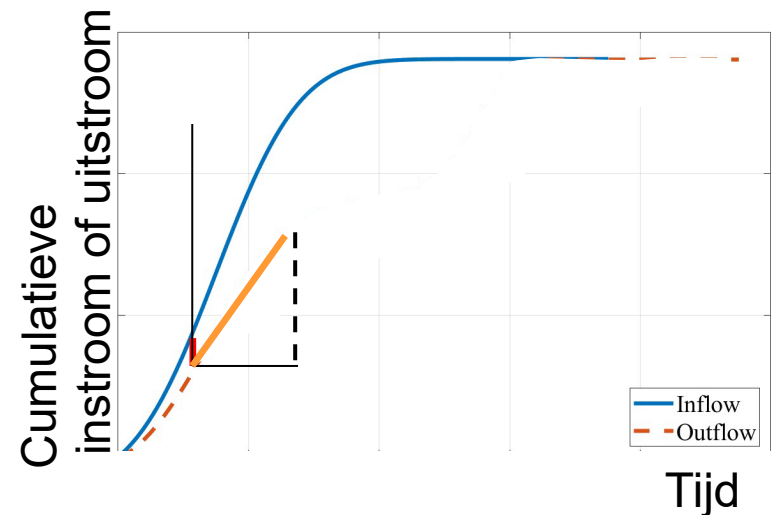
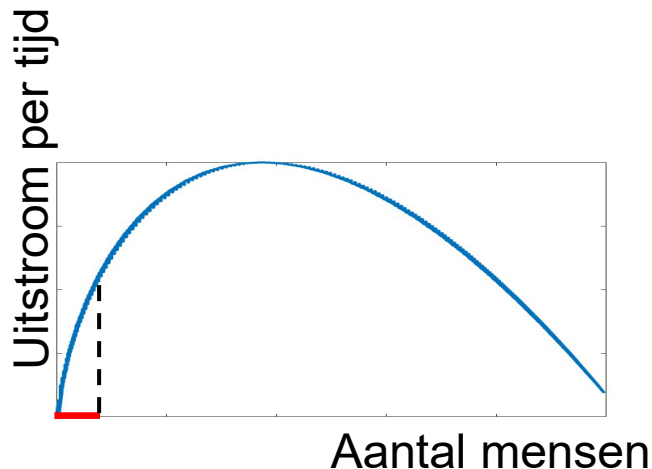
Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



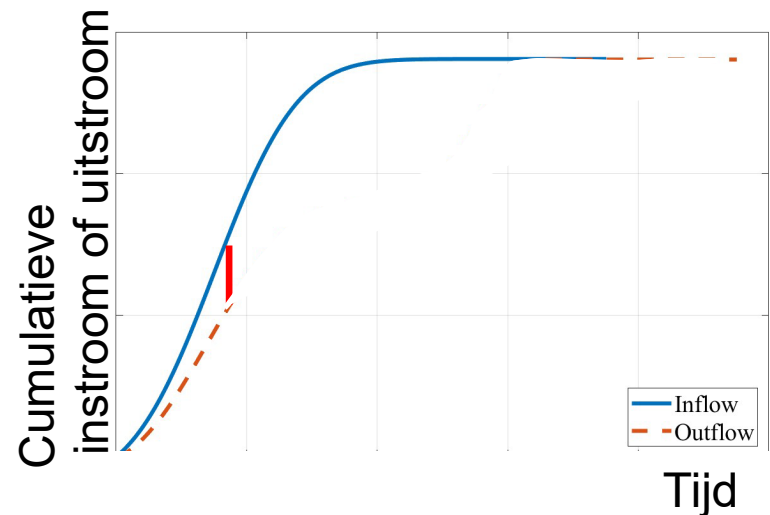
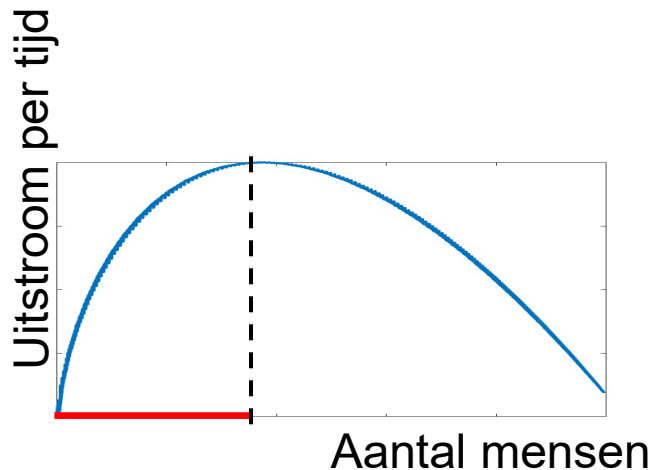
Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



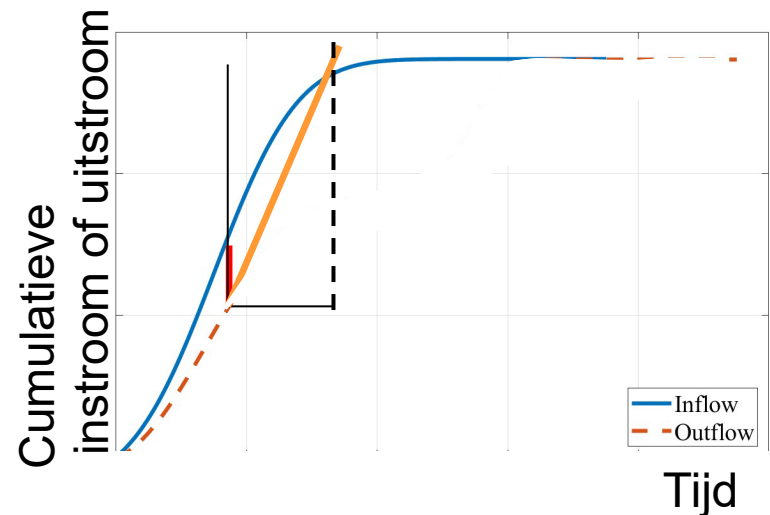
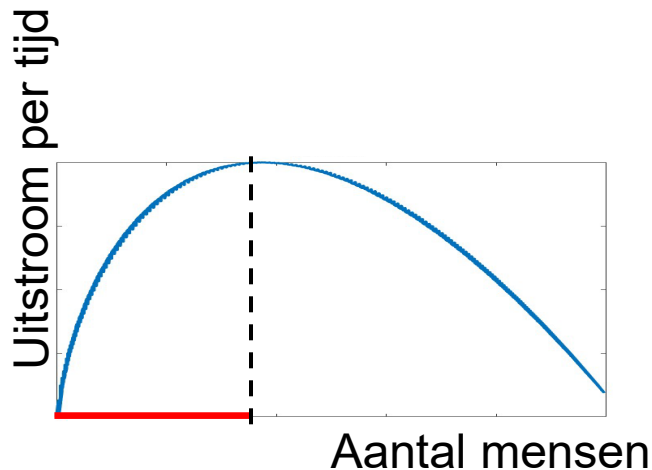
Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



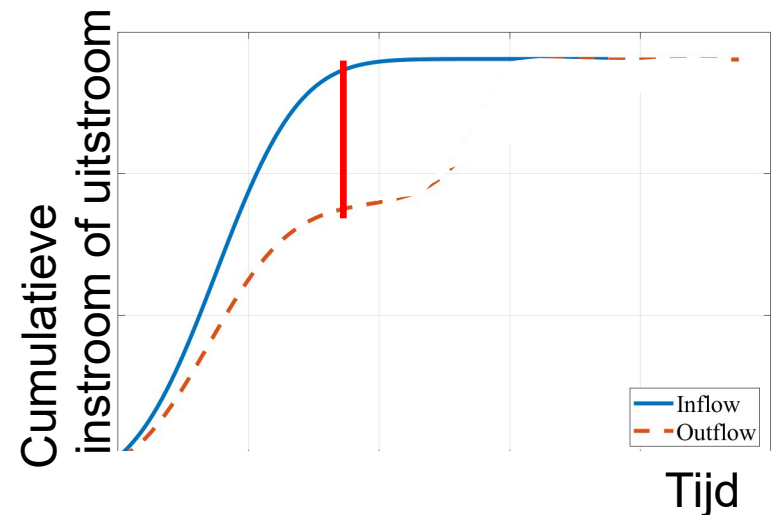
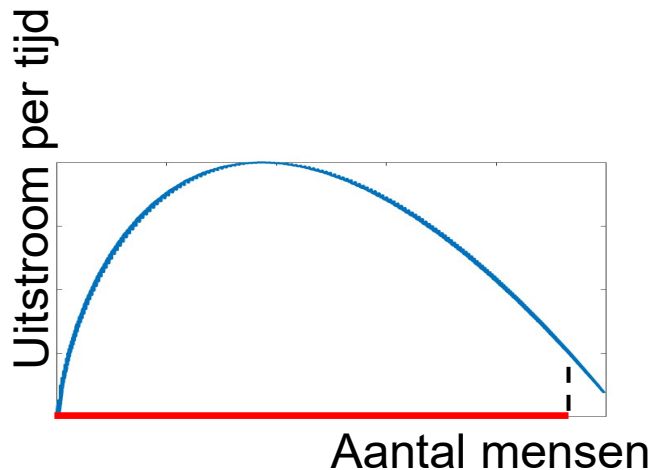
Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



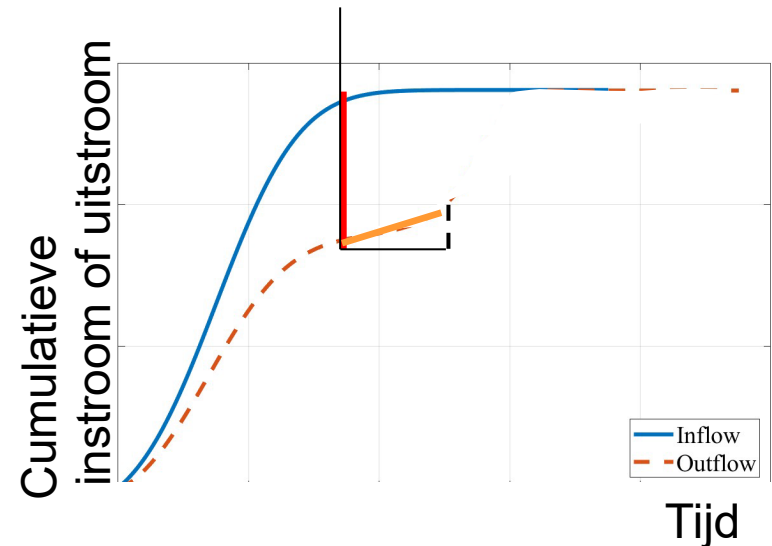
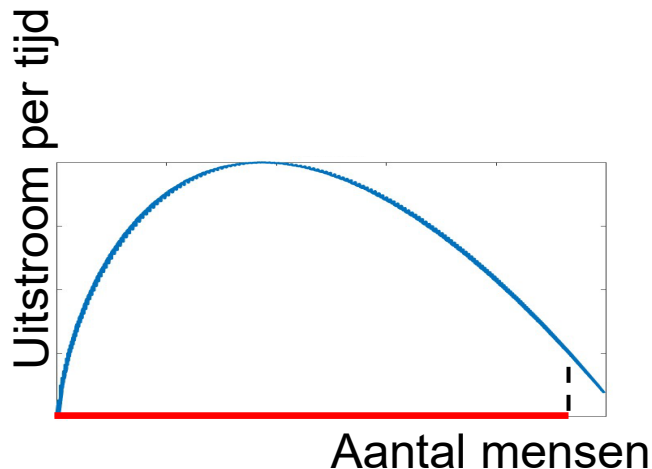
Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



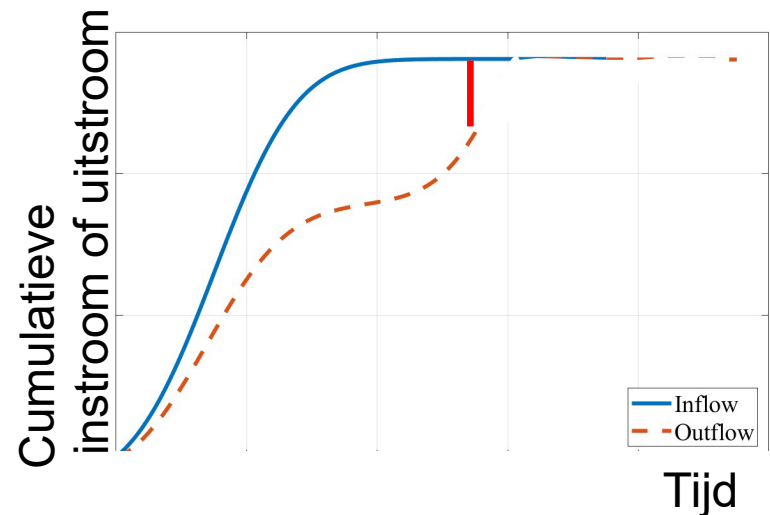
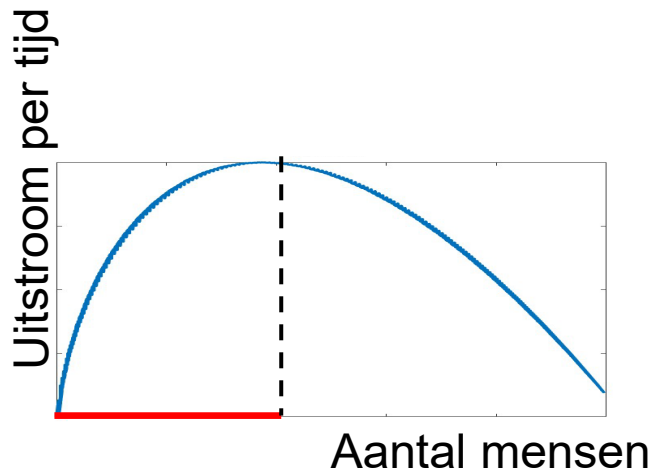
Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



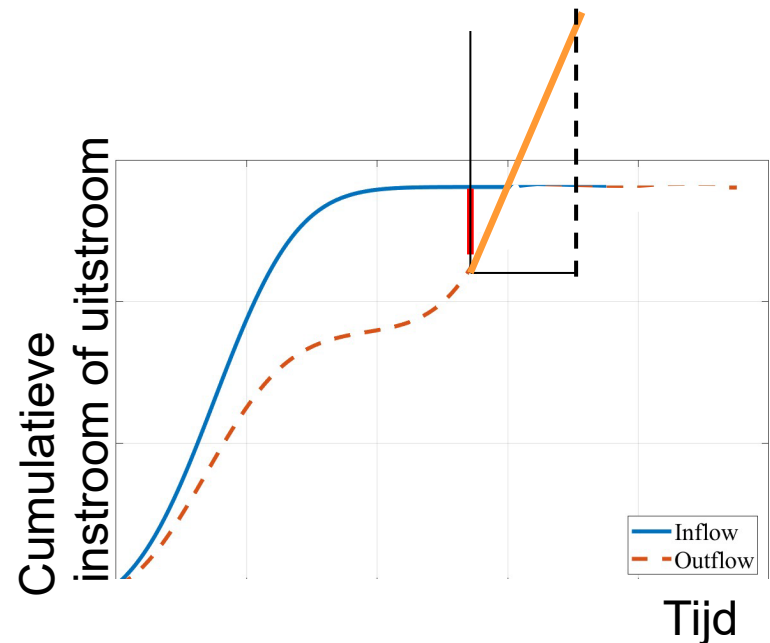
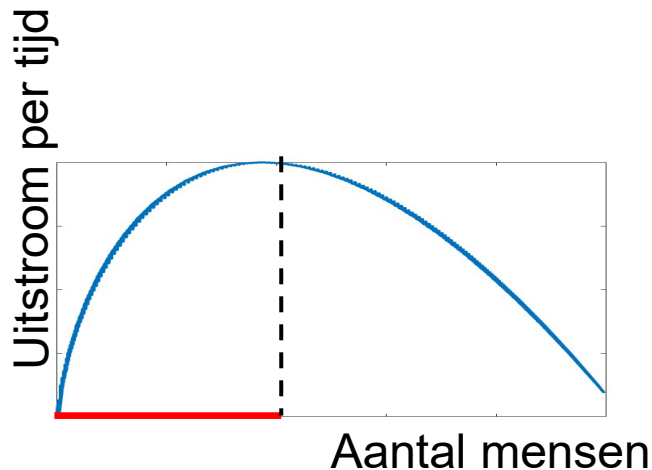
Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



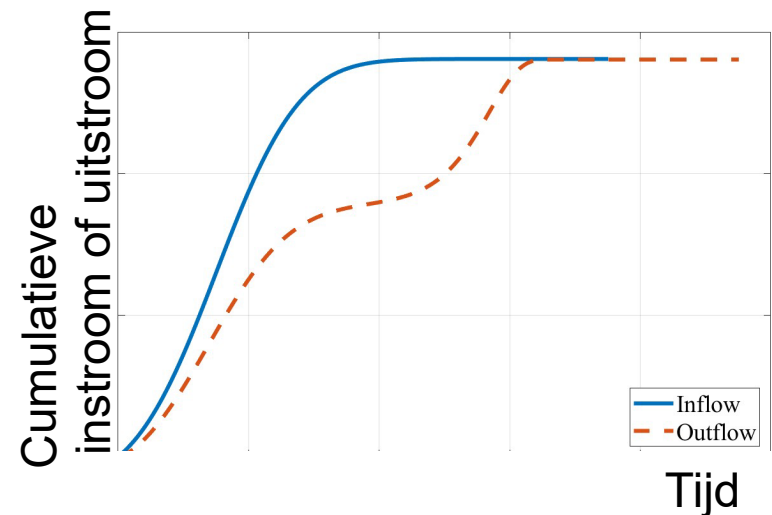
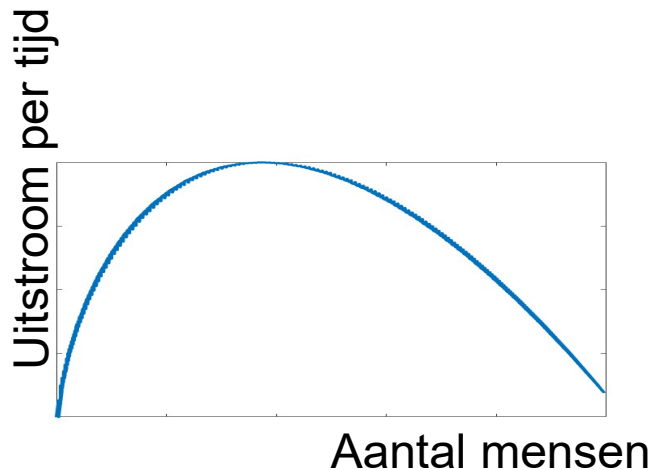
Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



Dynamica - grafisch

- Uitstroom $q_{\text{uit}} = dN/dt$ hangt af van het aantal mensen in het systeem N
- Instroom: hoe veel mensen gaan de weg op
- $dN/dt = q_{\text{in}}(t) - q_{\text{uit}}(N(t))$



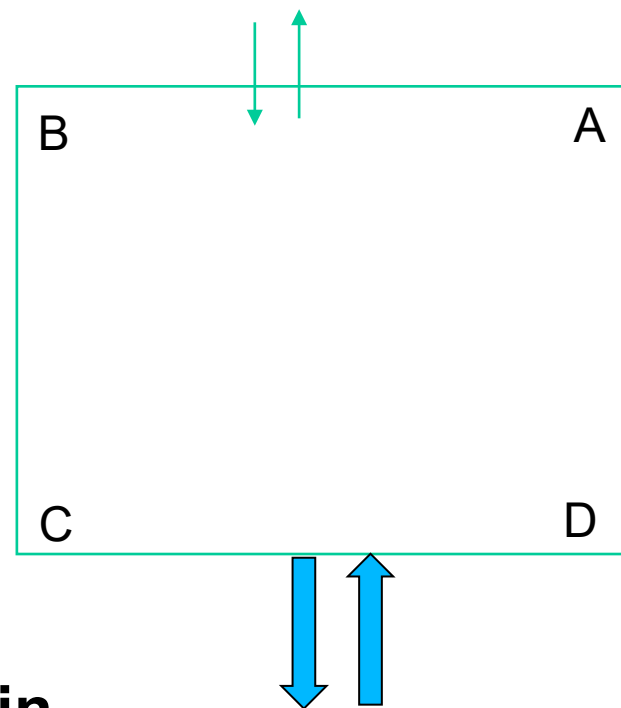
Samenvatting en tussenconclusie

- Snelheid verkeer daalt met aantal mensen
- Uitstroom verkeer heeft een maximum bij een bepaald aantal mensen
- Om doorstroming te verbeteren: beperk aantal mensen
 - Wachten buiten het systeem

EXPERIMENT

Set-up

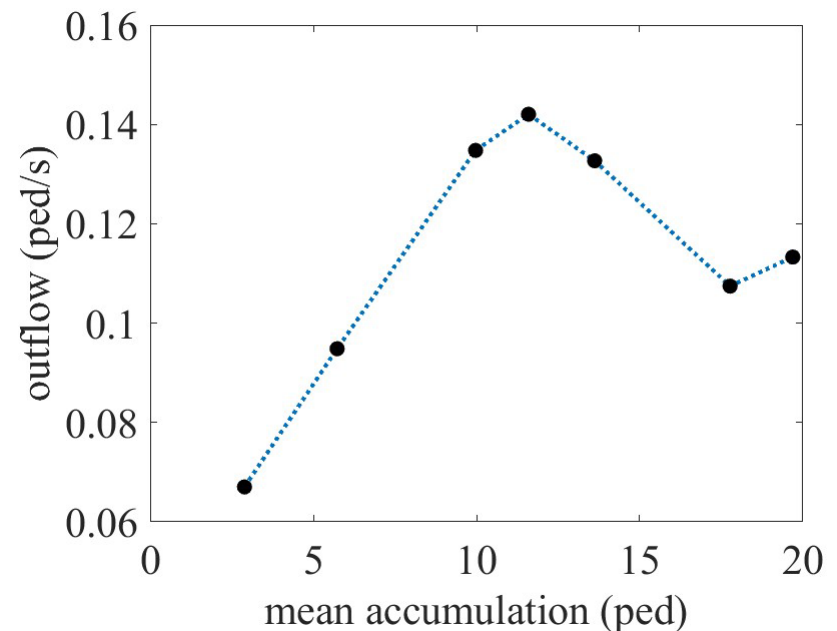
- Verkeerssysteem
 - Iedereen krijgt een route
 - Route klaar => eruit
 - **Hoe lang duurt het om 40 personen klaar te laten zijn
=> prestatie van systeem
afhankelijk van aantal mensen in systeem**
- Constant aantal personen
 - Begin met vast aantal
 - Daarna 1 erin = 1 eruit



$$\begin{array}{ccccccc} D & \rightarrow & A & \rightarrow & C & \rightarrow & A & \rightarrow & B & \rightarrow & A \\ \rightarrow & C & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow & B & \rightarrow & C & \rightarrow \\ \text{exit} & & & & & & & & & & \end{array}$$

Verwachting

- Weinig mensen => lage prestatie
- Veel mensen => lage prestatie
- Ergens een optimum (?)
- Prestatie is aantal mensen per tijd die uitstromen: $40/T$

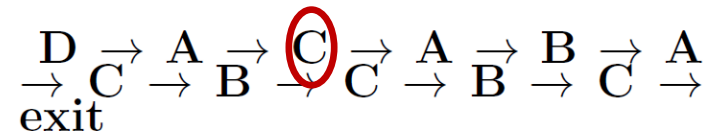


Praktisch

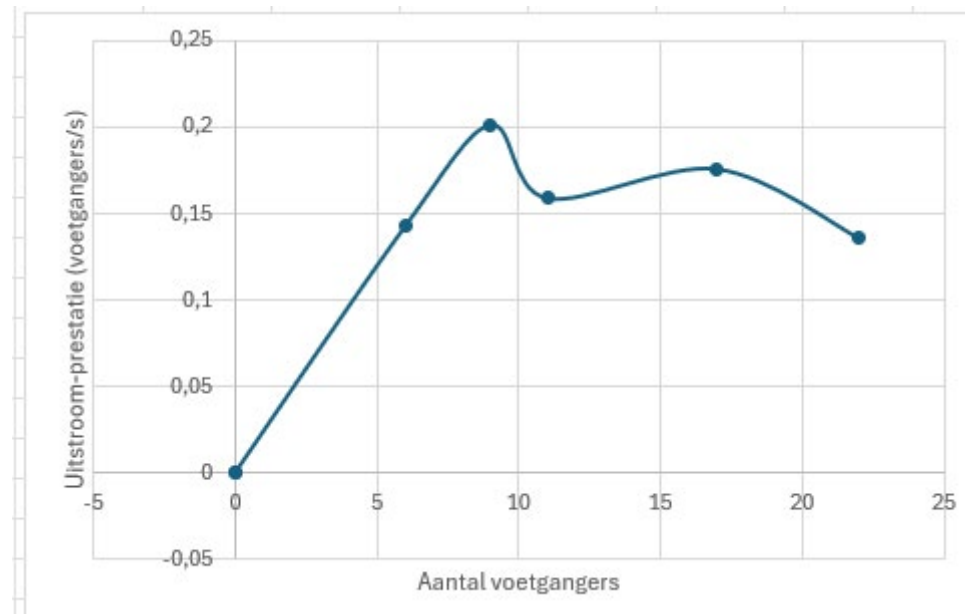
- Aantal verschillende runs,
steeds met een ander aantal mensen N
- Volg de route
- Ga met 2 voeten in het op de juiste letter staan
 - 1 persoon per letter (wachten indien bezet)
- Rij vormt bij ingang;
ga erin als iemand die eruit gaat je aantikt

Praktisch - begin

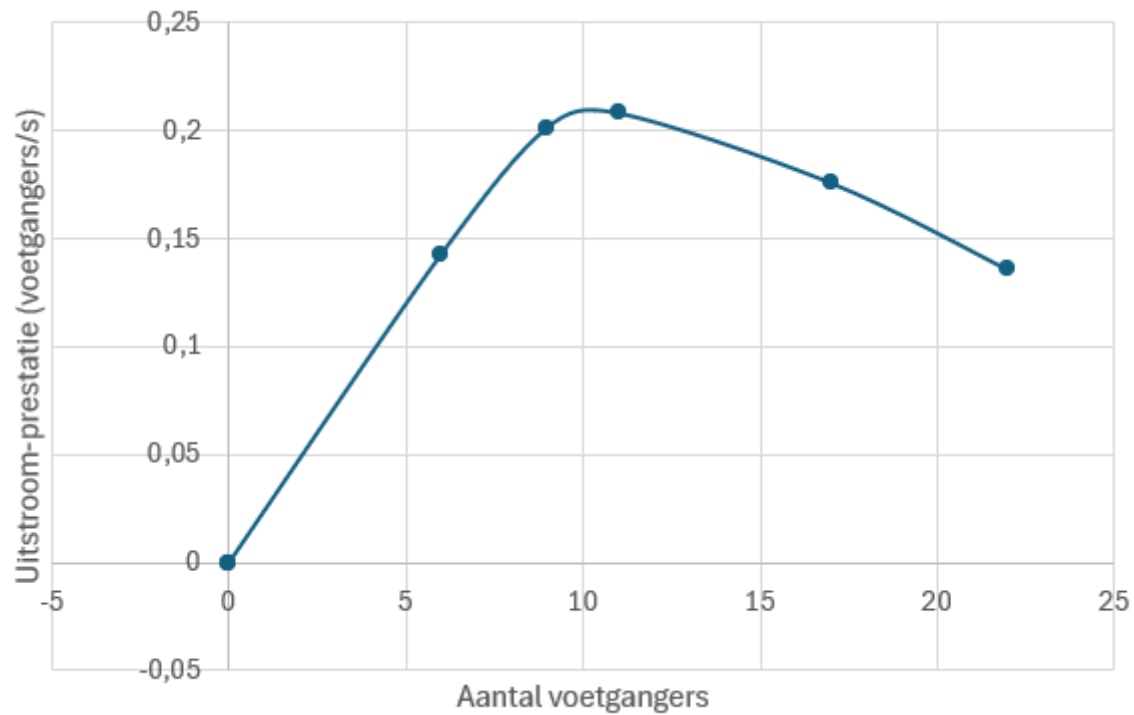
- Aantal verschillende runs, steeds met een ander aantal mensen N
- Begin: N mensen in systeem
- Voorkom dat iedereen tegelijk klaar is:
Verdeling van mensen over de voortgang van de route: begin bij letter verjaardag/3
10 juli => letter 3



Resultaten



Resultaten



Lessen (1)

- Meer mensen leidt tot lagere snelheid
- Bij veel lagere snelheid ook lagere uitstroom (moet toename in aantal mensen compenseren)
- Beperken van de instroom kan vertraging verminderen, ook als je de wachttijd bij de rand meeneemt

Praktisch

NIEUWSBERICHT

A2: extra maatregelen naar aanleiding van verkeersdrukte rondom Nieuwegein

Gepubliceerd op: 19 augustus 2024, 19.07 uur

Vrijdag 16 augustus 2024 zijn de werkzaamheden aan de A2 tussen knooppunt Oudenrijn en Everdingen begonnen. Daardoor ontstond grote verkeersdrukte in en rondom Nieuwegein, Houten en IJsselstein.

Op maandag 19 augustus zijn Rijkswaterstaat, gemeente Nieuwegein en de Veiligheidsregio in gesprek gegaan over maatregelen om de doorstroom te bevorderen en daarmee te zorgen dat de vertragingen de komende weekenden niet zo hoog oplopen als 16 augustus 2024.

Gezamenlijk is besloten tot meerdere maatregelen om de instroom in Nieuwegein te beperken en het verkeer beter te begeleiden.

Extra maatregelen A2

Er worden bestaande verkeerslichten aangepast om de instroom te beperken en er worden extra tekswagens en borden geplaatst. De verkeerslichten op de toegangswegen van Nieuwegein gaan dus wat langer op rood, zodat de stad de hoeveelheid verkeer aankan.

Gemeente IJsselstein neemt ook maatregelen tegen sluipverkeer door afsluiting A2

22 augustus 2024, 15:30 **Nieuws** 3.952 keer gelezen



IJSSELSTEIN • Rijkswaterstaat gaat vanaf donderdag weer verder met de werkzaamheden aan de A2. Naast Rijkswaterstaat en de gemeente Nieuwegein neemt ook de gemeente IJsselstein maatregelen om sluipverkeer tegen te gaan, om zo nieuwe verkeerschaos te voorkomen.

De Noord IJsseldijk is vrijdag de hele dag afgesloten voor autoverkeer. "Dit doen we voor de veiligheid van IJVO-deelnemers en bezoekers", aldus de gemeente. Eerder liet de gemeente al weten de weg twee keer per dag af te sluiten om iedereen veilig van en naar huis te laten fietsen, tussen 08:30 en 09:30 uur en tussen 15:30 en 16:15 uur. Het evenement levert namelijk extra fietsverkeer op rondom het terrein aan de Noord IJsseldijk. Nu gaat de weg dus de hele dag dicht.

Lessen (2)

- Tools voor de experimenten beschikbaar:
www.victorknoop.eu
- Contact:
v.l.knoop@tudelft.nl